

Sammanfattning TNG022

Nathalie Ek

24 november 2010

1 System och modeller

1.1 Vad är en modell?

En modell är ett verktyg för att besvara frågor om systemet utan att genomföra experiment.

- **Mentala modeller:** Modeller som baseras på intuition och erfarenheter.
- **Verbala modeller:** Ett system som beskrivs med ord hur det uppför sig.
- **Fysiska modeller:** Modeller som efterliknar systemet.
- **Matematiska modeller:** Användning av samband mellan storheter (avstånd, strömstyrkor, flöden, arbetslöshet etc) som kan observeras i systemet anges som matematiska relationer i modellen.

2 Exempel på modeller

2.1 Deterministisk - Stokastisk

En modell är *deterministisk* om den arbetar med enbart exakta samband mellan mätbara och härledda variabler samt uttalar sig utan säkerhet. En modell är *stokastisk* om den arbetar med osäkerhets- eller sannolikhetsbegrepp. Beskrivs med stokastiska variabler eller stokastiska processer.

2.2 Dynamisk - Statisk

Systemet sägs vara *statiskt* om det finns direkta, momentana samband mellan vissa variabler. *Dynamiska* system förändras variablerna även utan direkt yttre påverkan och därmed kan deras värden bero även på tidigare anbringade signaler. Matematiskt visar sig dynamiken oftast i förekomsten av derivator med avseende på tiden av vissa variabler - derivatan beskriver en förändringshastighet. Dynamiska modeller innehåller alltså typiska differentialekvationer.

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t) \quad - \text{dynamisk}$$

$$y(t) = u(t - 7) \quad - \text{dynamisk}$$

$$y(t) = \sin(u(t)) \quad - \text{statisk}$$

2.3 Tidskontinuerlig -Tidsdiskret

En matematisk modell som beskriver ett samband mellan tidskontinuerliga signaler är alltså *tidskontinuerlig*. I praktiken erhålls oftast signalerna på samplad form, som en följd av tidsdiskreta mätningar. En modell som direkt anger sambandet mellan signalernas värden i samplingsögonblicken kallas för *tidsdiskret* modell, alternativt en samplad modell.

2.4 Aggregerad - Fördelad

Många fysikaliska fenomen är beskrivna av partiella differentialekvationer, händelseförloppet är fördelat över rumsvariablerna. Dessa beskrivningssätt kallas **fördelade**. Om förloppen beskrivs av ett ändligt antal variabler som förändras, talar man om **aggregerade** modeller. Dessa modeller beskrivs oftast av ordinära differentialekvationer.

2.5 Förändringsorienterad - Händelseorienterad

Förändringsorienterade modeller beskrivs i regler i termer av kontinuerliga förändringar i signaler och variabler. System som har konstruerats av människor beter sig dock annorlunda då förändringarna sker i termer av diskreta händelser. Dessutom inträffar slumpvisa händelser som styr och påverkar systemet. Det kan röra sig om maskiner som går sönder osv. Dessa system kallas därför för **händelseorienterade** system.

2.6 Tillståndsbeskrivningar - DAE-beskrivningar

En modell som innehåller ekvationer med och utan derivator kallas för **differentialalgebraisk ekvationsmodeller (DAE-modell)**. En ekvation som innehåller precis en derivata som är utlöst. Denna derivata beror bara på de variabler vars derivator finns utlösta. En modell av denna form kallas **tillståndsmodell** och x är kallas tillstånd för systemet.

2.7 Huvudpunkter

- Modeller kan baseras på fysikaliskt modellbygge och på identifiering.
- Fysiska objekt och signaler kan modelleras.
- Modeller är oftast dynamiska, vilket visar sig genom att tidsderivator uppträder i de matematiska sambanden.
- Dynamiska modeller ges oftast av DAE-samband. Ett viktigt specialfall är modeller på tillståndsform.

3 Modeller

3.1 Modeller

3.1.1 Matematiska modeller

En beskrivning av systemet där relationerna mellan modellens variabler och signaler uttrycks som matematiska samband. Matematiska modeller av signaler och dynamiska system kommer i princip bestå av differentialekvationer.

3.1.2 Komponentmodell

En logisk och/eller fysikalisk uppdelning av systemets funktioner och visar hur de olika komponenterna påverkar varandra.

3.1.3 Bindningsgrafer

Mellanting mellan en matematisk modell och en komponentmodell.

3.1.4 Blockschemamodeller

Ett specialfall av en komponentmodell där man kan tilldela riktningar till förbindelserna mellan olika komponenter (block). Blockscheman är mycket användbara för att strukturera upp ett system, speciellt för större och mer komplexa system.

3.2 Svarta lådor och enkla experiment

3.2.1 Transientanalys

- Utmärkt metod för att snabbt och enkelt få insikt i orsakssamband, tidsfördröjningar, tidskonstanter och statiska förstärkningar.
- Kanske den vanligaste identifieringsmetoden i industriell praktik.
- Nackdelen är att information sällan är precis.
- Begränsning i insignalens storlek tillsammans med de störningar och mätfel som finns, gör det svårt att bestämma kvantitativa modeller med bra noggrannhet.

3.2.2 Frekvensanalys

Frekvensanalys är en metod som ofta används för att bygga modeller av olika system. Man kan peka på följande för- och nackdelar med metoden:

- Lätt att använda och kräver ingen speciell databehandling.
- Kräver inga strukturella antaganden om systemet annat än att det är linjärt.
- Man kan lätt undersöka speciellt intressanta frekvensområden extra noga.
- **Nackdel** - Det primära resultat är en tabell eller en graf över funktionen $G(i\omega_k)$, $k = 0, \dots, M$. Det kan inte direkt användas för simulering.
- **Nackdel** - Speciellt system i tillverkningsindustrin kan man inte experimentera fritt med. Frekvensanalys kan även kräva långa experimenttider om man vill bestämma $G(i\omega)$ för många frekvenser.

3.3 Variabler och signaler

Storheter som inte varierar med tiden kallas för *konstanter* (massor, längder, areor, matematiska konstanter såsom π , vilka är konstanta under i tiden under en simulering men som kan variera mellan simuleringar) och storheter som varierar med tiden kallas för *variabler* eller *signaler*.

Förekomsten av insignaler och uppdelningen på styr- och störsignaler är inte entydigt bestämd av systemen som sådana. Det är vår uppfattning av vad som kan variera(s) och om vi förfogar över variationerna som avgör detta.

3.4 Tillståndsmodeller

Förutsatt att $f(x, u)$ är tillräckligt snäll (det räcker att f är kontinuerligt deriverbar och u styckvis kontinuerlig), har differentialekvationen $\dot{x} = f(x, u)$ med $x(t_0) = x_0$ en entydig lösning för $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u)\end{aligned}\tag{1}$$

3.5 Stationära lösningar, statistiska samband och linjärisering

3.5.1 Stationär lösning

Vi antar att insignalen är konstant i tiden, $u(t) = u_0$. Om vi låter tillståndsvektorn x_0 vara en lösning till ekvationen $f(x_0, u_0) = 0$. Det kan finnas fler x_0 som löser ekvationen, men det kan också saknas lösning beroende på u_0 och funktionen $f(x, u)$.

Löser man en differentialekvation med initialvillkoret $x(t_0) = x_0$ och får att $\dot{x}(t_0) = x_0$ samt $x(t; x_0, t_0, u_0) = x_0$ (konstant lika med x_0 , har man funnit en lösning som kallas för *stationär lösning*. Man säger att x_0, u_0 är en *stationär punkt* till differentialekvationen (1). Ibland säger man även *singulär punkt* eller *jämnviktspunkt*.

Den stationära lösningen x_0 är *asymptotiskt stabil* om lösningar $x(t)$ som startar tillräckligt nära x_0 konvergerar mot x_0 då $t \rightarrow \infty$. Lösningen är *globalt asymptotiskt stabil* om alla lösningar $x(t)$ till (1) med $u(t) = u_0$ konvergerar mot x_0 då $t \rightarrow \infty$.

3.5.2 Statiska samband

Då den stationära punkten är en implicit funktion av u_0 , är även den stationära utsignalen en funktion av u_0 .

$$y_0 = h(x_0(u_0), u_0) = g(u_0) \quad (2)$$

Detta samband beskriver det *statiska samband* som råder mellan en konstant insignal och motsvarande stationära utsignal. Om den stationära lösningen är asymptotiskt stabil och insignalen ändras från en nivå till en annan, kommer utsignalen så småningom att anta det värde som ges av y_0 .

Termen *tidskonstant* används för att tala om i vilken tidsskala utsignalen närmar sig det stationära värdet y_0 .

3.5.3 Linjärisering

Linjärisering är ett viktigt och användbart verktyg. Vi måste dock peka på några viktiga begränsningar:

- Linjärisering kan endast användas för att studera lokala egenskaper i närheten av en stationär lösning.
- Det är ofta svårt att kvantitativt uppskatta hur god approximationen i den linjäriserade lösningen är. Därmed måste slutsatser behandlas med viss försiktighet.

3.6 DAE - differentialalgebraisk ekvation

DAE är ett sammansatt system av differentialekvationer och algebraiska (statiska) ekvationer. Om man vill skriva det på tillståndsform måste man t.ex. lösa ut u_1 genom att lösa ekvationssystemet

$$u_1 = h_2(x_2, h_1(x_1, u_1)) \quad (3)$$

I det allmänna fallet måste man alltså lösa ett ekvationsystem för en modell där två tillståndsbeskrivningar infår i en återkopplingslinga.

När en utsignal till ett system beror direkt av insignalen, brukar man säga att systemet har en *direktterm*. Om ett system av systemen i återkopplingslingan saknar direktterm, är det rättfram att skriva upp en tillståndsbeskrivning för det sammansatta systemet.